2023 - 2024

SCIENCES DES ORGANISATIONS

L 1

UE 15

Semestre 1

Responsables pédagogiques :

Nejla Nouaili et Denis Pasquignon

Reproduction effectuée par l'Université Paris-Dauphine avec l'autorisation du CFC (20, rue des Grands Augustins – 75006 Paris).

La reproduction de ce document par tout moyen que ce soit est interdite conformément aux articles L. 111-1 et L. 122-4 du code de la propriété intellectuelle.

Nejla Nouaili
CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 75016 Paris, France.
E-mail : nouaili@ceremade.dauphine.fr

Denis Pasquignon
CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 75016 Paris, France.
E-mail : pasquignon@ceremade.dauphine.fr

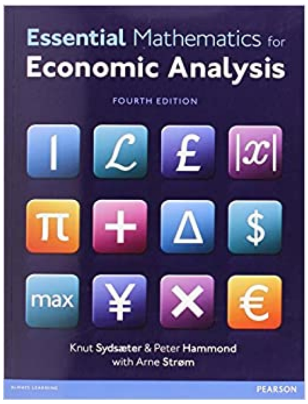
Table des matières

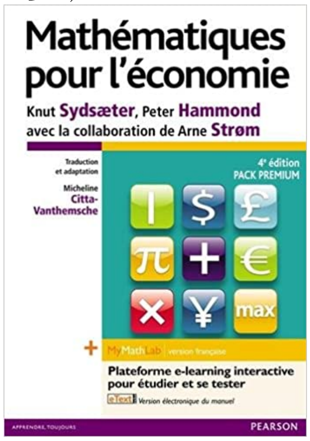
Avertissement

Ce document est issu d'un support de cours Mise à niveau et outils mathl. Il doit beaucoup

— au polycopié de Denis Pasquignon.

— au Livre suivant (en anglais et traduit en français)





Il reste sans aucun doute beaucoup d'erreurs et de coquilles. N'hésitez pas à nous les signaler.

Chapitre 1

Etude de fonction

1.1 introduction

Les fonctions sont importantes dans presque tous les domaines des mathématiques pures et appliquées, y compris celles qu'on emploie en économie. L'analyse économique foisonne de termes comme « fonctions d'offre » et « fonctions de demande », « fonctions de coût », « fonctions de production », « fonctions de consommation », etc.

1.2 Domaine de définition et parité :

Définition 1 *Une* application f *est la donnée d'un* ensemble de départ*, d'un* ensemble d'arrivée*, et d'une* règle de calcul *qui associe à tout élément x de l'ensemble de départ un unique élément de l'ensemble d'arrivée, noté $f(x)$ et appelé image de x par f. La règle de calcul est notée $x \mapsto f(x)$.*
Le domaine de définition d'une fonction *est l'ensemble des réels x pour lesquels le calcul de $f(x)$ est possible.*
Le graphe d'une fonction f *est l'ensemble des points $(x, f(x))$ lorsque x décrit le domaine de définition de f.*

Définition 2 *Si le domaine de définition D d'une fonction f est symétrique, c'est-à-dire si l'on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in D \Longrightarrow -x \in D,$$

On dit que f est une fonction paire si

$$\forall x \in D, \quad f(x) = f(-x).$$

Dans ce cas, le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
On dit que f est une fonction impaire si

$$\forall x \in D, \quad f(x) = -f(-x).$$

Dans ce cas, le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine.

Par exemple la fonction $f(x) = x^2$ est paire sur son domaine $I\!R$ tandis que $f(x) = x^3$ est impaire sur $I\!R$.

1.3 Opérations sur les fonctions

Soit deux fonctions f et g définies sur le même domaine I, on peut alors additionner, soustraire, multiplier ces deux fonctions et ainsi créer de nouvelles fonctions $f+g$, $f-g$, fg définies sur I par

$$\forall x \in I, \;\; (f+g)(x) = f(x) + g(x), \;\; (f-g)(x) = f(x) - g(x), \text{ et } (fg)(x) = f(x)g(x).$$

Pour diviser f par g, il faut supposer de plus que g ne s'annule pas sur le domaine I, ci cela est le cas, on a

$$\forall x \in I, \;\; (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exemple 3 *On pose*

$$\forall x \in I\!R, \;\; f(x) = x^2 + 1 \textit{ et } g(x) = x^2 - 1,$$

f et g sont définies sur $I\!R$, on a

$$\forall x \in I\!R, \;\; (f+g)(x) = 2x^2, \;\; (f-g)(x) = 2 \textit{ et } (fg)(x) = x^4 - 1.$$

Pour la division, puisque la fonction g s'annule en 1 et -1, on a

$$\forall x \in I\!R \setminus \{-1, 1\}, \;\; (f/g)(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

On peut aussi composer des fonctions : ainsi $f \circ g$ est la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \;\; (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Cela signifie que l'on commence par calculer $g(x)$ puis on calcule la valeur de f au réel $g(x)$. Pour que ce calcul soit possible, il est nécessaire que le réel $g(x)$ soit dans le domaine de définition de f. Donnons deux exemples :

Exemple 4 *On pose*

$$\forall x \in I\!R, \;\; f(x) = x^2 + 1 \textit{ et } g(x) = x^2 - 1,$$

f et g sont définies sur $I\!R$, on a

$$\forall x \in I\!R, \;\; (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 1 = (x^2-1)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 2.$$

Par contre $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux fonctions différentes :

$$\forall x \in I\!R, \;\; (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x^2+1)^2 - 1 = x^4 + 2x^2.$$

1.4 Calcul de dérivées

1.4.1 Définition

Définition 5 *Soit a un réel et soit f une fonction définie sur une partie D qui contient a. On appelle taux d'accroissement de f en a, noté $\theta_a(x)$, la fonction quotient définie par*

$$\forall x \in D \setminus \{a\}, \ \ \theta_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La fonction f est dérivable en a si la fonction θ_a a une limite lorsque x tend vers a. On note $f'(a)$ cette limite.
On dit que f est dérivable sur D si f est dérivable en tout point de D et on note f' la fonction dérivée de f.

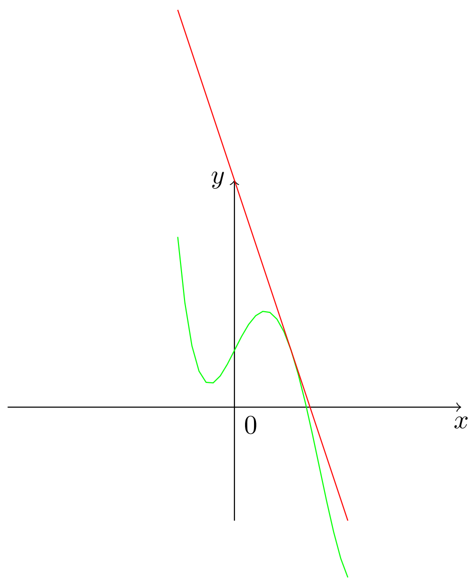
1.4.2 Equation de tangente

Définition 6 *Soit a un réel et soit f une fonction définie sur une partie D qui contient a. On suppose que la fonction f est dérivable en a, la tangente au graphe de f au point $A = (a, f(a))$ est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $(1, f'(a))$.*
Une équation de la tangente est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente.
On dit que f est dérivable sur D si f est dérivable en tout point de D et on note f' la fonction dérivée de f.

Exemple 7 *Dans la figure ci-dessous, on a tracé le graphe de la fonction $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x + 1$ ainsi que la tangente en $x = 1$ d'équation $y = -3x + 4$.*



1.5 Les formules

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle
x^n, $n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$.

Fonction f	Dérivée f'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'1}{v^2}$
$\ln(\|u\|)$.	$\frac{u'}{u}$
e^u	$e^u \times u'$
$(u)^\alpha$	$\alpha\,(u)^{\alpha-1} \times u'$

1.6 Fonctions convexes ou concaves

Définition 8 convexité
Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ c'est-à-dire une fonction deux fois dérivable sur I et dont la dérivée seconde est continue sur I, On dit que f est convexe sur I si pour tout réel $x \in I$, $f''(x) \geq 0$. De même on dit que f est concave sur I si pour tout réel $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

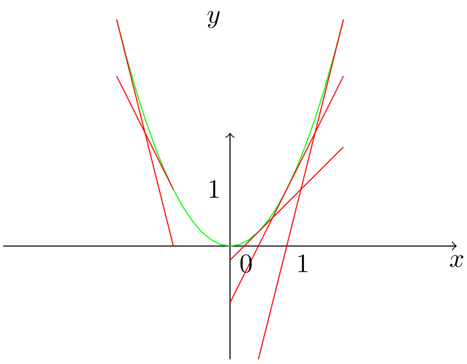
Proposition 9 *Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$, alors*

$$\forall c \in I,\ \forall x \in I, \quad f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c).$$

Cette inégalité exprime que le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes lorsque f est convexe.
De même soit f une fonction concave sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$, alors

$$\forall c \in I,\ \forall x \in I, \quad f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c).$$

La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $I\!R$, on a tracé 4 tangentes au graphe de cette fonction, on peut constater que le graphe est au-dessus de chaque tangente.

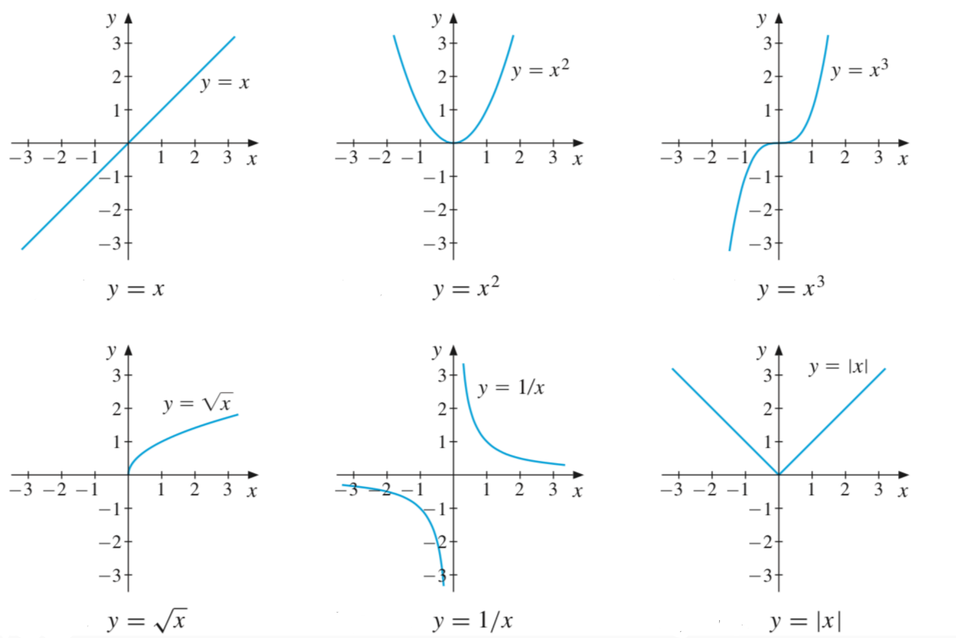


Remarque : La représentation graphique d'une fonction convexe sur un intervalle a cette allure : $\cup$, et celle d'une fonction concave a cette allure : $\cap$.

1.7 Méthodologie pour l'étude d'une fonction

L'étude d'une fonction passe par plusieurs étapes qu'il est primordial de bien maîtriser. Ci dessous on donne les étapes pour étudier une fonction f et réprésenter son graphe :

⋆ Déterminer **le domaine de défintion**.
⋆ Vérifier si la fonction est paire ou impaire.
⋆ Étudier la dérivabilité de la fonction f sur son domaine de définition.
⋆ Si la fonction est dérivable,**calculer sa dérivée** f'.
⋆ Étudier le signe de la dérivée pour **connaître le sens de variation de la fonction**.
⋆ Calculer les limites sur le bord du domaine de définition.
⋆ Représenter **le tableau de variation** .
⋆ Dessiner le graphe de la fonction en utilisant les étapes précédentes.



Représentation graphique des quelques fonctions usuelles.

Remarque : la fonction valeur absolue $y = |x|$ est donnée par la définition 20, page 14 .

1.8 Fonctions bijectives

Définition 10 bijection
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On dit que f est bijective de I sur $f(I)$ ou est une bijection de I sur $f(I)$ si pour chaque $y \in f(I)$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet une unique solution $x \in I$.
Si f est bijective de I sur $f(I)$, on peut définir la fonction réciproque de f notée f^{-1} définie sur $f(I)$ par : pour chaque $y \in f(I)$, $f^{-1}(y)$ est l'unique solution dans I de l'équation $y = f(x)$.

Proposition 11 $\ln$ **est une bijection de** $\mathbb{R}^{+*}$ **sur** $\mathbb{R}$, *l'exponentielle est l'application réciproque de* $\ln$

$$\forall x > 0, \ \ \forall y \in \mathbb{R}, \ \ \ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y.$$

Proposition 12 *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.*

Lorsque deux fonctions $f$et$g$ sont réciproques l'une de l'autre, leurs graphiques sont symétriques par rapport 'a la droite $y = x$.

1.9 Exercices

Exercice 1.9.1 ***Domaine de définition***

(a) On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{4x}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{2x-1}{x}$.

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g.
2. Déterminer la fonctions : $\dfrac{f}{g}$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ainsi que son domaine de définition.

(b) Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \sqrt{x^2 - 1}, \\ h_2(x) &= x \ln(x). \end{aligned}$$

Exercice 1.9.2 ***Calcul de dérivée***

Calculer la dérivée des fonction suivantes

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \ln(x+1) \text{ sur }]-1, +\infty[, & f_4(x) = -3x^3 + x^2 - x + 17 \text{ sur } \mathbb{R}, \\ f_2((x) = \sqrt{x^2+1} \text{ sur } \mathbb{R}, & f_5(x) = x\sqrt{x+1} \text{ sur }]-1, +\infty[, \\ f_3((x) = \exp(x^3) \text{ sur } \mathbb{R}, & f_6(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1} \text{ sur } \mathbb{R}. \end{array}$$

Exercice 1.9.3 Soit $C(x)$ le coût total de production de x unités d'un bien. Le quotient $F(x) = \frac{C(x)}{x}$ est le coût moyen de production quand x unités sont produites. Calculez $F'(x)$.

.

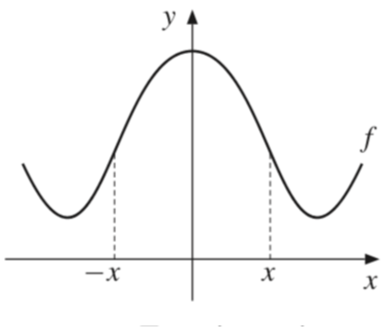
Exercice 1.9.4 ***Fonctions convexes et concaves***

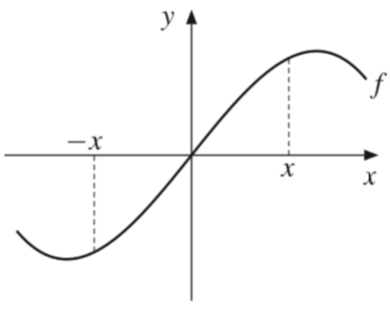
Dire si les fonctions suivantes sont convexes ou concaves en le justifiant

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sqrt{x} & g(x) = \ln(x), \\ h(x) = e^{x-1} - x. & \end{array}$$

Exercice 1.9.5 ***Fonctions paire et impaire.***

Dire si les graphiques suivant correspondent à une fonction paire ou impaire en le justifiant.





Exercice 1.9.6 ***Fonctions bijectives.***

On considère la fonction g définie sur $I\!R$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

1. Montrer en justifiant les inégalités strictes que

$$\forall x \in I\!R, \quad 0 < g(x) < 1.$$

2. Montrer que g est une bijection de $I\!R$ sur $]0,1[$.
3. Tracer le graphe de g.
4. Déterminer $g^{-1}(y)$ pour $y \in]0,1[$.

Chapitre 2

Equation de droites

2.1 Fonction affine

2.1.1 Définition et Propriétés

Définition 13 Fonction affine *Une fonction affine f est définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

La courbe représentative de f est une droite du plan d'équation

$$y = ax + b.$$

Toute fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = a.$$

Le réel a s'appelle le coefficient directeur (ou la pente) de la droite.

Remarque :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 0 \\ -\infty \text{ si } a < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } a > 0 \\ +\infty \text{ si } a < 0 \end{cases}.$$

Proposition 14 Calcul du coefficient directeur ou la pente
Soit $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points distincts d'une droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. On suppose que $x_A \neq x_B$, le coefficient directeur (ou la pente), noté a, de la droite $\mathcal{D}$ est

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Définition 15 Equation cartésienne d'une droite
$\mathcal{D}$ est une droite de $I\!R^2$ si et seulement si il existe trois réels α, β et γ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tels que

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in I\!R^2 \, , \, \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}.$$

"$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$" est appelée équation cartésienne de $\mathcal{D}$. Le vecteur $(-\beta, \alpha)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Exemple 16 *Soit deux points $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on cherche l'équation cartésienne de la droite (AB). On est amené à résoudre le système à deux équations et trois inconnues notées a, b et c :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha + 7\beta + \gamma & = & 0, \\ -\alpha + \beta + \gamma & = & 0, \end{array} \right.$$

Ce système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha + 7\beta + \gamma & = & 0, \\ 9\beta + 3\gamma & = & 0, \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 2/3\gamma, \\ \beta & = & -1/3\gamma, \end{array} \right.$$

On a donc une infinité de solutions, il suffit de déterminer une solution, par exemple pour $\gamma = 3$, on a $\alpha = 2$ et $\beta = -1$. Ainsi une équation de la droite (AB) est

$$2x - y + 3 = 0.$$

que l'on peut écrire $y = 2x + 3$.

La droite (AB) est le graphe de la fonction $f(x) = 2x + 3$. Le coefficient directeur de cette droite est 2.

Exemple 17 *Soit le point $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on cherche l'équation cartésienne de la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$. On a $-\beta = 2$ et $\alpha = 1$, il reste à déterminer γ qui est solution de*

$$1 - 2 + \gamma = 0 \text{ d'où } \gamma = 1.$$

Par conséquent une équation de la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est

$$x - 2y + 1 = 0.$$

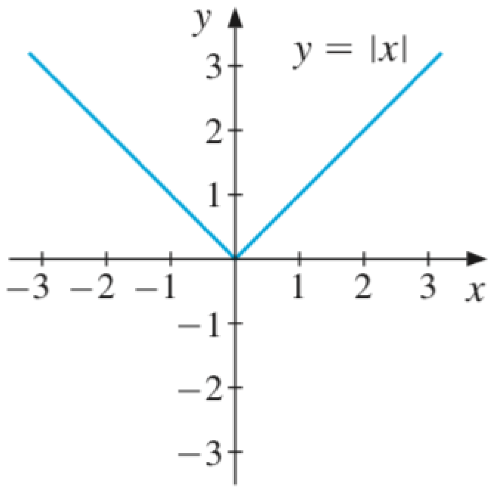
Exemple 18 *On considère la droite d'équation cartésienne $2x + 3y - 1 = 0$. Les points $A = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ vérifient l'équation donc sont sur la droite qui est donc aussi la droite (AB).*

De même un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mais aussi $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{AB} = -2\vec{u}$.

Remarque 19 *L'équation cartésienne n'est pas unique. Les équations : $x + 2y + 3 = 0$ et $4x + 8y + 12 = 0$ définissent la même droite.*

Définition 20 Valeur absolue
Pour x un nombre réel, on note la valeur absolue de x $|x| = \left\{ \begin{array}{lll} x & si & x \geq 0, \\ -x & si & x < 0. \end{array} \right.$

Nous remarquons que pour tout $x \in I\!R$, $|x| = |-x|$.



Représentation graphique la fonction valeur absolue.

Définition 21 Propiţés de la valeur absolue
Pour tout x, y réels et $a > 0$,

$$\left\{\begin{array}{lll} |x| = 0 & \Longleftrightarrow & x = 0, \text{ le seul réel vérifiant } |x| = 0 \text{ est } 0. \\ |xy| & = |x||y|. & \\ |x| \leq a & \Longleftrightarrow & -a \leq x \leq a. \end{array}\right.$$

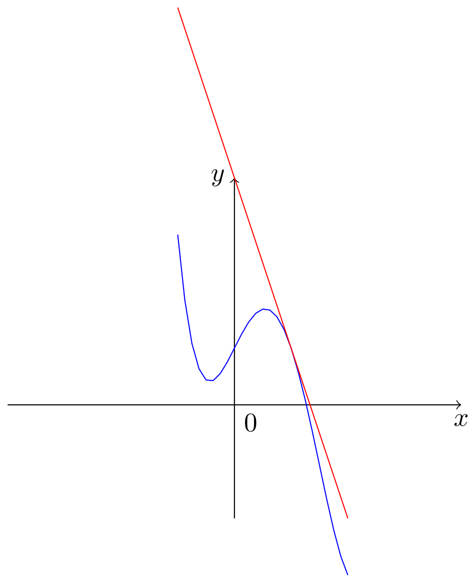
2.2 Equation de tangente

Définition 22 *Soit a un réel et soit f une fonction définie sur une partie D qui contient a. On suppose que la fonction f est dérivable en a, la tangente au graphe de f au point $A = (a, f(a))$ est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $(1, f'(a))$.*
Une équation de la tangente est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

$f'(a)$ est le coefficient directeur (pente) de la tangente.

Exemple 23 *Dans la figure ci-dessous, on a tracé le graphe de la fonction $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x + 1$ ainsi que la tangente en $x = 1$ d'équation $y = -3x + 4$.*

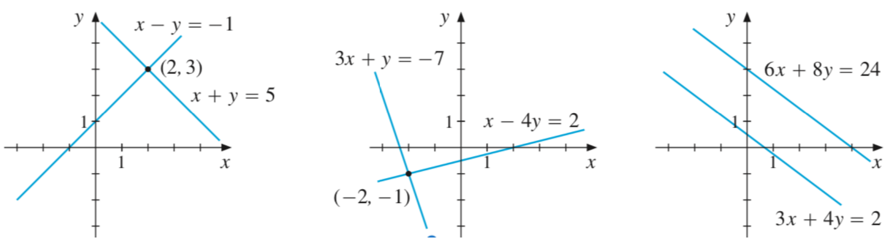


2.3 Résolution d'un système d'équation

On considère les trois systèmes suivants :

$$(a) \left\{ \begin{array}{lcl} x+y & = & 5 \\ x-y & = & -1 \end{array} \right. \quad (b) \left\{ \begin{array}{lcl} 3x+y & = & -7 \\ x-4y & = & 2 \end{array} \right. \quad (c) \left\{ \begin{array}{lcl} 3x+4y & = & 2 \\ 6x+8y & = & 24 \end{array} \right.$$

Ci dessous trois représentations graphiques correspondants à ces trois systèmes.



Résolution graphique des systèmes (a), (b) et (c)

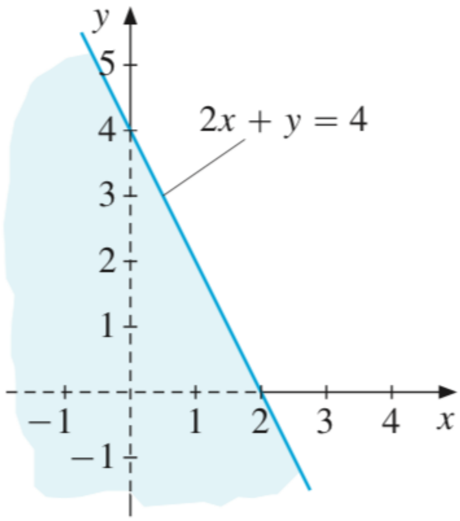
Exercice : Résoudre chacun des systèmes et vérifier avec le graphe votre résultat.

2.4 Inégalité linéaire

Représenter l'ensemble des réels (x, y) vérifiant l'inégalité

$$2x + y \leq 4.$$

Solution :L'inégalité peut être écrite $y \leq -2x + 4$.
On représente d'abord Δ, la droite d'équation $y = -2x + 4$. Alors, l'ensemble des points (x, y) vérifiant $y \leq -2x + 4$ doit avoir des valeurs de y en dessous de la droite Δ, voir la figure ci dessous



Exemple 24 ***Exemple de fonction linéaire en économie***

En économie, la plupart des modèles linéaires sont des approximations de modèles plus compliqués. Ci dessous un exemple où le modèle linéaire (fonction affine) est utilisé.

Déterminez les pentes des droites suivantes et donnez-en une interprétation.

— *(a)* $C = 55;73x + 182100000$ *: Fonction de coût estimée de US Steel Corp (1917-1938). (C est le coût total en dollars par an et x le nombre de tonnes d'acier produites annuellement).*

— *(b)* $q = -0,15p+0,14$ *: Fonction de la demande annuelle estimée de riz en Inde durant les années 1949-1964 (p est le prix en roupies indiennes et q la consommation par personne).*

Solution :

— *(a) La pente est égale à* $55,73$*, ce qui signifie que si la production augmente de 1 tonne, le coût de production s'accroˆt de* $55,73$ *dollars.*

— *(b) La pente est égale à* $-0,15$*, ce qui signifie que si le prix augmente d'une roupie indienne, la quantité demandée diminue de* $0,15$ *unite.*

2.5 Exercices

Exercice 2.5.1 On se place dans un plan muni d'un repère orthonormée.

1. On considère la droite D_1 passant par les points $A = (2, -3)$ et $B = (4, -5)$.
   (a) Représenter graphiquement cette droite.
   (b) Quel est le coeff-icient directeur de cette droite ?
   (c) Déterminer une équation cartésienne de la droite D_1.
   (d) Est-ce-que le point $O = (0, 0)$ est sur la droite D_1 ?
2. On considère la droite D_2 passant par les points $C = (1, 1)$ et $D = (3, 3)$.
   (a) Représenter graphiquement cette droite.
   (b) Quel est le coefficient directeur de cette droite ?
   (c) Déterminer une équation cartésienne de la droite D_2.
3. Déterminer l'intersection de D_1 et de D_2.
4. On considère la droite D_3 passant par le point $E = (-1, 3)$ et de vecteur directeur $u = (-3, 2)$.
   (a) Représenter graphiquement cette droite.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de la droite D_3.
   (c) Est-ce-que le point $O = (0, 0)$ est sur la droite D_3 ?

Exercice 2.5.2 On considère la droite

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2, \;\; 2x + 3y = 6\}.$$

1. Déterminer deux points distincts de D.
2. Représenter graphiquement cette droite.
3. Déterminer un vecteur directeur de D que l'on notera u.
4. Est-ce-que le point $A = (1, 1)$ est sur la droite D ?
5. Quelle est l'équation cartésienne de la droite Δ qui passe par le point A de vecteur directeur u.
6. Représenter la droite Δ sur le même graphique.

Exercice 2.5.3 On considère le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x + y & = & 1, \\ x - y & = & 2 \end{array}\right.$$

1. Tracer dans un repère orthonormée les droites d'équations $2x + y = 1$ et $x - y = 2$, puis déterminer sur le graphe le point d'intersection de ces deux droites. En déduire une solution du système.
2. Résoudre le système et vérifier le résultat de la question précédente.

Exercice 2.5.4 Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - y & = & 5, \\ x + y & = & 1. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x + 4y & = & 1, \\ 6x + 8y & = & 6. \end{array}\right.$$

Exercice 2.5.5 Repésentez dans le plan l'ensemble de tous les points dont les coordonnées (x, y) satisfont aux trois inéquations

$$3x + y \leq 12, \quad x - y \leq 1, \quad 3x + y \geq 3.$$

Exercice 2.5.6 ***Modèle macroéconomique***
Au début d'une année, une personne dispose de 10000€ *sur deux comptes. Les taux d'intérêt annuels respectifs sont* 5% *et* 7,2%. *Si la personne n'effectue aucun transfert en cours d'année et a gagné* 676€ *d'intérêt, quelle était la répartition de la somme sur les deux comptes ?*

Chapitre 3

Les polynômes

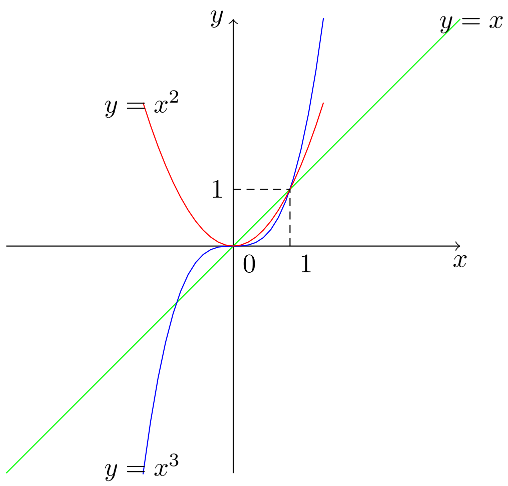
3.1 Les fonctions polynômes et les fractions rationnelles

Définition 25 La fonction puissance entière *Pour tout entier naturel non nul* $n \in \mathbb{N}^*$*, la fonction puissance* f_n *est définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n.$$

Pour $n = 0$*,* f_0 *est la fonction constante égale à 1.*

Ci dessous la representation graphiques des fonctions $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ et $f_3(x) = x^3$.



Proposition 26 Dérivée *Pour tout entier* n*, la fonction puissance est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

Exemple 27 $f_2'(x) = (x^2)' = 2x$ *et* $f_11(x) = (x^{11})' = 11x^{10}$.

Définition 28 Polynômes et Fraction rationnelle *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction P est un polynôme si l'on peut écrire*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$$

où $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Si $a_n \neq 0$, on dit que le degré de P est n.
Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

Exemple 29 *Voici un exemple de polynôme P*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 4 + 3x + 8x^3 \text{ et } P'(x) = 3 + 24x^2.$$

et un exemple de fraction rationnelle

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad F(x) = \frac{2x+1}{x-1} \text{ et } F'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

Définition 30 Factorisation d'un polynôme de degré 2 *On considère un polynôme P de degré 2, il existe trois réels $a \neq 0$, b et c tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c.$$

On pose

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

— *si $\Delta > 0$, alors P a deux racines réelles distinctes*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

et on peut écrire P sous forme factorisée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

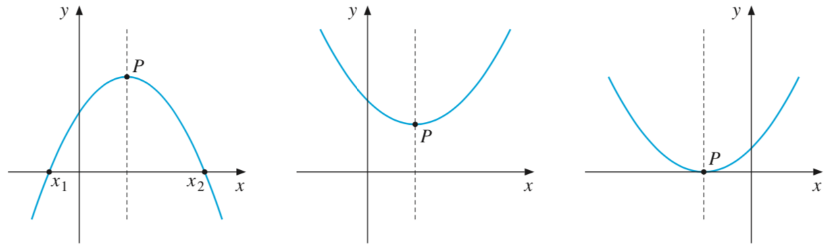
— *Si $\Delta = 0$, alors P a une racine réelle*

$$x_1 = \frac{-b}{2a},$$

et on peut écrire P sous forme factorisée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a(x - x_1)^2.$$

— *Si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racines réelles.*



(a) $a < 0,\ b^2 > 4ac$ (b) $a > 0,\ b^2 < 4ac$ (c) $a > 0,\ b^2 = 4ac$

Représentation graphique de $P(x) = ax^2 + bx + c$ selon des valeurs a, b et c

Proposition 31 Factorisation *Soit P un polynôme . Si a est une racine de P, c'est-à-dire $P(a) = 0$. alors il existe un polynôme Q tel que*

$$P = (x - a)Q.$$

Exemple 32 *Soit le polynôme P défini par*

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3.$$

On remarque que 1 est une racine de P puisque $P(1) = 1 + 3 - 1 - 3 = 0$, il existe donc un polynôme Q tel que

$$P = (x - 1)Q.$$

Pour déterminer le polynôme Q, on commence par remarquer que Q est de degré 2 donc

$$Q(x) = ax^2 + bx + c,$$

puis on développe

$$\begin{array}{rcl}(x-1)Q(x) & = & (x-1)(ax^2+bx+c), \\ & = & ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c, \\ & = & ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.\end{array}$$

L'égalité $P = (x - 1)Q$ devient

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.$$

Par identification, on a le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1, \\ -a+b & = & 3, \\ -b+c & = & -1, \\ -c & = & -3. \end{array}\right.$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1, \\ b & = & 4, \\ c & = & 3, \\ c & = & 3. \end{array}\right.$$

Par conséquent on a

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x-1)(x^2 + 4x + 3).$$

De plus l'étude de $x^2 + 4x + 3$ *montre que -1 et -3 sont racines, par conséquent, on a*

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x-1)(x+1)(x+3).$$

3.2 Exercices

Exercice 3.2.1 Factorisez les polynômes suivants

$$P(x) = x^2 - 2x + 1, \quad Q(x) = x^2 + 4x + 3, \quad R(x) = 2x^3 + 4x^2 - x, \quad T(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6.$$

Pour le polynôme T, calculez $T(1)$.

Exercice 3.2.2 On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{x-3}{x}$.

1. Déterminer les domaines de définition de f et de g.
2. Déterminer les fonctions $f+g$, $f-g$, $\dfrac{f}{g}$ ainsi que leurs domaines de définition.

Exercice 3.2.3 Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, préciser le domaine de définition et simplifier l'écriture

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}, \quad f_2(x) = \frac{x-x^2}{x}, \quad f_3(x) = \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}.$$

$$f_4(x) = \frac{x^2+3x-4}{2x^2+5x-7}.$$

Déterminer les limites dans les cas suivants en détaillant le raisonnement :

$$\lim_{x\to 0} f_2(x), \qquad \lim_{x\to 3} f_3(x),$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{2x^2+5x-7}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^6+x^3-1}{x^8+x^2-2}.$$

Exercice 3.2.4 Soit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}.$$

Trouver en le justifiant le graphique correspondant à chacune des deux fonctions f et g.

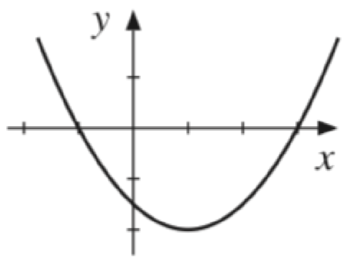


figure 1.

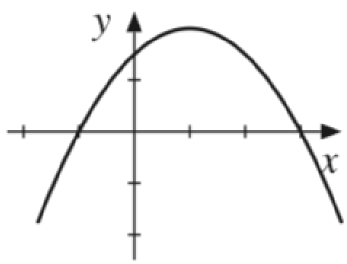


figure 2.

Exercice 3.2.5 ***Problème d'optimisation du deuxième dégré en économie.***
Une entreprise produit et vend Q unités d'un bien au prix $P = 102 - 2Q$ et la production et la vente de Qunit´es coôutent $C = 2Q + \frac{1}{2}Q^2$. Le profit est donné par l'expression

$$F(Q) = PQ - C.$$

1. Développer l'expression du profit $F(Q)$.
2. Déterminez la valeur de Q qui rend le profit $F(Q)$ maximal ainsi que la valeur de ce profit maximal.

Chapitre 4

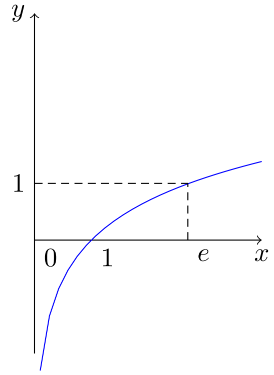
Le logarithme

4.1 Définition et Propriétés

Définition 33 *La fonction logarithme népérien notée* ln *est définie sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et*

$$\forall x > 0, \ \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

La fonction ln *est la primitive de* $\frac{1}{t}$ *qui s'annule en 1 donc* ln *est continue, dérivable sur* $\mathbb{R}^{+*}$.



Proposition 34 *On a les propriétés suivantes :*

1. $$\forall x > 0, \;\; (\ln)'(x) = \frac{1}{x}, \;\; (\ln)''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

2. $$\ln(1) = 0 \;\; et \;\; \ln(e) = 1$$

3. $$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad et \; \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

4. $$\forall x > 0, \;\; \forall y > 0, \;\; \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x), \;\; \ln(\frac{y}{x}) = \ln(y) - \ln(x)$$
$$\forall x > 0, \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \;\; \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x).$$

4.2 Exercices

Exercice 4.2.1 1. Ecrire en fonction de $\ln 2$ les nombres

$$A = \ln(\frac{e^2}{8}), \quad B = \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \ln(\frac{1}{4}).$$

2. Comparer les nombres

$$A = \ln 4 + \ln 3, \quad B = \ln 7.$$

Exercice 4.2.2 Calculer en fonction de $\ln(3)$

$$A = 3\ln(e^2/9) + \ln(27) - \ln(1/3).$$

Exercice 4.2.3 Prouver les égalités suivantes :

$$a) \ \ln x - 2 = \ln\left(\frac{x}{e^2}\right), \quad b) \ \frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{2}\ln x - \ln(x+1) = \ln\frac{x^2}{x+1},$$
$$c) \ 3 + 2\ln x = \ln(e^3x^2), \quad d) \ \ln x - \ln y + 2\ln z = \ln\frac{xz^2}{y}.$$

Exercice 4.2.4 1. Montrer que la fonction f donnée par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $f(0)$.
3. Montrer que $f(1) + f(-1) = 0$ puis que pour tout réel x, $f(x) + f(-x) = 0$.

Exercice 4.2.5 On pose pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) = 3\ln(x^4) - 4\ln(x^3).$$

1. Calculer $f(1)$ et $f(e)$.
2. Montrer que

$$\forall x > 0, \quad f(x) = 0.$$

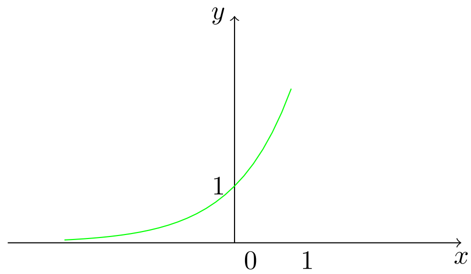
Chapitre 5

La fonction exponentielle

5.1 Définition et Propriétés

Définition 35 *La fonction exponentielle est la fonction réciproque du logarithme népérien*

$$\forall x \in I\!R, \ \ \forall y > 0, \ \ y = exp(x) = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y).$$



Proposition 36 *On a les propriétés suivantes :*

1. $$\forall x \in I\!R, \ \ (exp)'(x) = e^x, \ \ (exp)''(x) = e^x.$$

2. $$e^0 = 1, \ \ e^1 = e$$

3. $$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0, \ \ \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

4. $$\forall x \in I\!R, \, \forall y \in I\!R, \ \ e^{x+y} = e^x e^y \ \ \ e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \ \ (e^x)^y = e^{xy}.$$

5.2 Exercices

Exercice 5.2.1 Comparer les réels A et B

$$A = (e^3)^2 \text{ et } B = e^3 \times e^2.$$

puis les réels C et D

$$C = \frac{e^{-2}}{e^4} \text{ et } D = ((e^2)^6 \times e)^{-1}.$$

Exercice 5.2.2 Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, préciser le domaine de définition

$$f_1(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}, \quad f_2(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Exercice 5.2.3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (e^x + e^{-x})^2 - e^x(e^x + e^{-3x}).$$

Prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2.$$

Exercice 5.2.4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $e^{3x+4} = 1/e$,
2. $e^{2x} - 1 = 0$,
3. $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.

Exercice 5.2.5 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

1. $e^{2x+1} < e$,
2. $3e^x + 1 > 0$,
3. $2e^{4x-2} - 4 < 0$.

Exercice 5.2.6 On considère la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{6e^x}{e^x + 1}.$$

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$ en fonction de e.
2. Montrer que pour tout réel x, $f(x) + f(-x)$ est une constante.

Chapitre 6

La fonction puissance

6.1 Définition et Propriétés

Définition 37 *Soit $r \in \mathbb{R}$, la fonction puissance r est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par*

$$\forall x > 0, \quad x^r = e^{r\ln(x)}$$

L'allure des courbes dépend essentiellement de la valeur de r ; comme en émoignenet les figures de 1 à 3 :

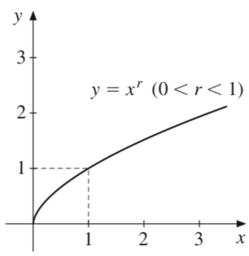


Figure 1

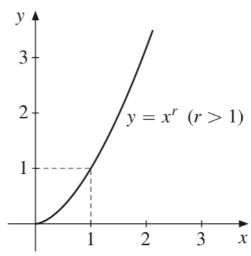


Figure 2

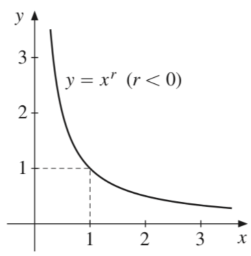


Figure 3

- Si $0 < r < 1$, la courbe est comme la figure 1 proche de la courbe de $\sqrt{x}$.
- Si $1 < r$, la courbe a l'allure de la figure 2, en particulier si $r = 2$, c'est la moitié d'une parabole $y = x^2$.
- Si $r < 0$, le graphique a l'allure de figure 3, en particulier si $r = -1$, c'est une branche de l'hyperbole $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$.

La figure 4 La montre, superposés, les graphiques de$y = x^r$ pour diverses valeurs positives de l'exposant r .

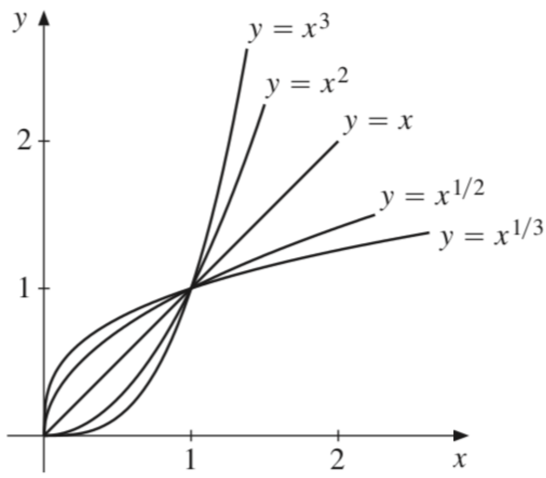


Figure 4

Proposition 38 *On a les propriétés suivantes*

1. *La fonction puissance est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}^{+*}$

$$\forall x > 0, \ \ (x^r)' = rx^{r-1}, \ \ (x^r)'' = r(r-1)x^{r-2},$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty} x^r = \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ 1 & \text{si } r = 0 \\ 0 & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^+} x^r = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0 \\ 1 & \text{si } r = 0 \\ +\infty & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

Proposition 39 Croissances comparées *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ *et* $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$, *on a*

1.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty,$$

2.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$$

On en déduit

Proposition 40

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^{\alpha} e^{\beta x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} |\ln(x)|^{\alpha} x^{\beta} = 0$$

Exemple 41

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty, \ \ et \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{3/2}} = 0.$$

Remarque Soit $a > 0$. Il est à souligner que les deux fonctions

$$f(x) = a^x \text{ et } g(x) = x^a$$

sont fondamentalement différentes.
La fonction $g(x)$ est une fonction puissance, elle défine sur $]0, +\infty[$.
Alors que la fonction $f(x)$ est une fonction exponentielle, elle est définie sur $I\!R$. La fonction $f(x)$ peut écrire

$$f(x) = a^x = \exp\left(x \ln(a)\right).$$

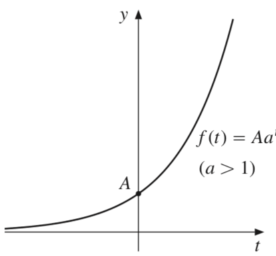


Figure 1 Graphique de $f(t) = Aa^t$ $(a > 1)$

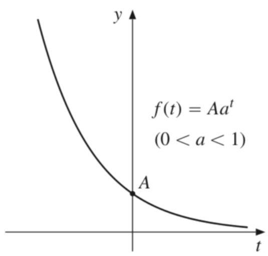


Figure 2 Graphique de $f(t) = Aa^t$ $(0 < a < 1)$

6.2 Exercices

Exercice 6.2.1 On considère les deux fonctions suivantes définies sur $I\!R$ par

$$f(x) = \sqrt{4x^2+9} + 2x, \quad g(x) = \sqrt{4x^2+9} - 2x.$$

1. Déterminer la limite de f lorsque $x \to +\infty$.
2. Montrer que la fonction g peut s'écrire

$$\forall x \in I\!R, \quad g(x) = \frac{9}{\sqrt{4x^2+9}+2x}.$$

3. En déduire la limite de g lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 6.2.2 On considère la fonction

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x^x = e^{x \ln x}.$$

1. Calculer $f(1), f(2), f(3)$.
2. Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$.

Exercice 6.2.3 On considère la fonction

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x^{1/x}.$$

1. Calculer $f(1), f(2)$.
2. Ecrire la fonction f sous forme exponentielle.
3. Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$.

Exercice 6.2.4 On considère la fonction

$$\forall x > 1, \quad f(x) = 4x^3 + \sqrt{\ln(x)} - e^{4x}.$$

1. Calculer $f(1), f(2)$.
2. Ecrire f en mettant en facteur e^{4x}.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 6.2.5 On considère la fonction définie sur un domaine D

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{x}.$$

1. Prouver que pour tout réel x, $e^x + 1$ est strictement positif.
2. En déduire le domaine de définition D de f.
3. Déterminer la limite de f en 0.
4. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
5. En mettant en facteur e^x dans le logarithme, montrer que

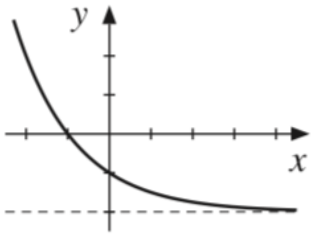
$$\forall x \in D, \quad f(x) = 1 + \frac{\ln(1+e^{-x})}{x}.$$

6. En déduire la limite de f en $+\infty$.

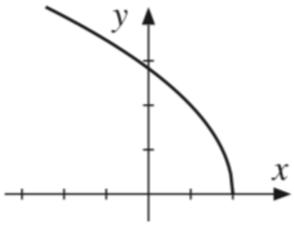
Exercice 6.2.6 On considère les fonction suivantes

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad g(x) = \sqrt{2-x} \quad h(x) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x - 2.$$

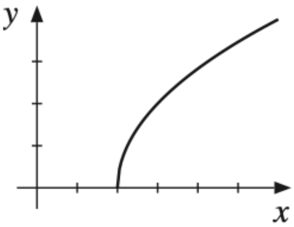
Donner la repreésentation graphique correspondant à chacune de ces fonctions en le justifiant.



A



B



C

Chapitre 7

Calcul de dérivée

“ Observer à quelle vitesse des grandeurs varient en fonction du temps est un sujet important dans la plupart des disciplines scientifiques, y compris l'économie. Que ce soit pour situer la position future d'une planète, prévoir la croissance d'une population parmi les espèces biologiques ou estimer la demande future d'un bien, nous avons besoin d'informations sur les **taux de variation**.
Le **taux de variation d'une fonction** est d'écrit par la dérivée qui est le concept central de l'analyse mathématique. Ce chapitre définit la dérivée d'une fonction et présente quelquesunes des règles importantes pour la calculer.
Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) ont découvert, indépendamment l'un de l'autre, la plupart de ces règles générales. Ce fut le début du calcul différentiel, fondement du développement des sciences modernes. Il fut aussi d'une importance capitale dans le développement théorique de l'économie moderne.“

7.1 Calcul de dérivée de fonction d'une variable

7.1.1 Définition

Définition 42 *Soit a un réel et soit f une fonction définie sur une partie D qui contient a. On appelle taux d'accroissement de f en a, noté $\theta_a(x)$, la fonction quotient définie par*

$$\forall x \in D \setminus \{a\},\ \ \theta_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La fonction f est dérivable en a si la fonction θ_a a une limite lorsque x tend vers a. On note $f'(a)$ cette limite.
On dit que f est dérivable sur D si f est dérivable en tout point de D et on note f' la fonction dérivée de f.

Exemple 43 *On considère la fonction $f(x) = x^2$ et soit a un réel, alors pour tout réel $x \neq a$, on a*

$$\theta_a(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x + a.$$

La limite de $\theta_a(x)$ est $2a$ quand x tend vers a donc f est dérivable en a et on retrouve la formule que nous connaissons

$$\forall a \in I\!R,\ \ f'(a) = 2a.$$

Exemple 44 *Calcul de limite en utilisant le taux d'accroissement :*
Soit $l = \lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$. *Pour calculer* l, *on introduit* $f(x) = x^4$ *et on écrit*

$$l = \lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \theta_1(x),$$

où $\theta_1(x)$ *est le taux d'accroissement de* f *en 1. Comme* f *est dérivable en* 1, *on déduit que*

$$l = \lim_{x\to 1} \theta_1(x) = f'(1) = 4.$$

7.1.2 Equation de tangente

Définition 45 *Soit* a *un réel et soit* f *une fonction définie sur une partie* D *qui contient* a. *On suppose que la fonction* f *est dérivable en* a, *la tangente au graphe de* f *au point* $A = (a, f(a))$ *est la droite passant par le point* A *et de vecteur directeur* $(1, f'(a))$.
Une équation de la tangente est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

$f'(a)$ *est le coefficient directeur de la tangente.*
On dit que f *est dérivable sur* D *si* f *est dérivable en tout point de* D *et on note* f' *la fonction dérivée de* f.

7.1.3 Les formules

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle
x^n, $n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$.

Fonction f	Dérivée f'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'1}{v^2}$
$\ln(\lvert u\rvert)$.	$\frac{u'}{u}$
e^u	$e^u \times u'$
$(u)^\alpha$	$\alpha\,(u)^{\alpha-1}\times u'$

7.2 Calcul de dérivée de fonction de deux variable

7.2.1 Définition d'une fonctions de deux variables

Définition 46 *Une fonction f de deux variables réelles x et y dont le domaine de définition est D est une rèegle qui associe un unique nombre réel f $(x;\ y)$ à chaque couple (x, y) de D.*

Exemple 47 *Soit $f(x,y)=x^2+y^2$, dfinie sur $D=\{(x,y), x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}=I\!R^2$.*

Exemple 48 *Soit $f(x,y)=\sqrt{x-1}+\sqrt{y}$. Pour que $\sqrt{x-1}$ et $\sqrt{y}$ aient un sens, il faut exiger $x\geq 1$ et $y\geq 0$. L'ensemble des point de coordonnées (x,y) qui satisfont cette ingalité est donné par Figure 1.*

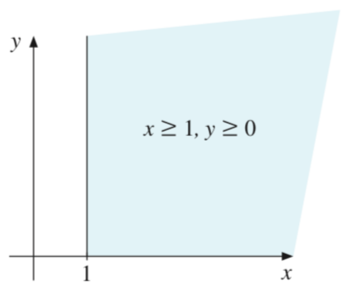


Figure 1

7.2.2 Les dérivées partielles premières des fonctions de deux variables

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ désigne la dérivée de $f(x, y)$ par rapport à x quand y est tenue constante.
   On dit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est la dŕivée partielle première de f par rapport à x.
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ désigne la dérivée de $f(x, y)$ par rapport à y quand x est tenue constante.

   n dit que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est la dŕivée partielle première de f par rapport à y.

Exemple 49 *Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes*

$$(a) \;\; f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + x + y^2, \quad (b) \;\; g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Solution :
(a) On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + 2xy^2 + 1 \text{ y est tenue constante.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 + 2x^2y + 2y \text{ x est tenue constante.}$$

(b) Pour cette fonction il faut faire appel aux règles de dérivation du quotient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 - y^2x}{(x2 + y^2)^2}.$$

7.2.3 Les dérivées partielles secondes (ou d'ordre 2) des fonctions de deux variables

Les dérivées partielles premières sont, en général, à nouveau des fonctions de deux variables que l'on peut envisager de dériver partiellement par rapport à x et à y, à condition que ces nouvelles dérivées partielles existent. Elles sont appelées dérivée partielles secondes ou d'ordre deux de $f(x, y)$ et sont au nombre de quatre. Elles sont notées

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{y \partial x}.$$

Exemple 50 *On considère l'exemple 49 (a), on a alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x^2y + 2y^2, \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 4xy, \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 + 2, \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 + 4xy.$$

7.3 Exercices

Exercice 7.3.1 En considérant le taux d'accroissement en 0, montrer que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7.3.2 En utilisant la notion de taux d'accroissement, déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}, \quad b) \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad c) \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Exercice 7.3.3 Après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, déterminer la fonction dérivée :

$$\begin{array}{rcc} f_1(x) = 2x^2 - 4x + 1, & f_2(x) = -x^3 + 2x^2 + \frac{1}{x}, & f_3(x) = \sqrt{x+3}, \\ f_4(x) = 3 - \dfrac{7}{x+1}, & f_5(x) = (2x+3)^{10}, & f_6(x) = \dfrac{1}{(2x+3)^{10}}, \\ f_7(x) = (-4x^2+3)^3, & f_8(x) = x\sqrt{4-x^2}, & f_9(x) = \dfrac{x-1}{x+1}, \\ f_{10}(x) = \dfrac{-3x^2+7x-1}{x-4}, & f_{11}(x) = 8\sqrt{\frac{1}{x}}, & f_{12}(x) = (x^2+x+1)^7. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} g_1(x) = 3^x x^3, & g_2(x) = x\ln(x) - x, & g_3(x) = \ln(2x+3), \\ g_4(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+e^{2x}}, & g_5(x) = e^{2x+3}, & g_6(x) = \ln(\dfrac{1}{1+x^2}), \\ g_7(x) = e^{-x^2/2}, & g_8(x) = (2x^2+1)^{3/2}, & g_9(x) = x^x = e^{x\ln(x)}, \\ g_{10}(x) = \ln(e^x+1), & g_{11}(x) = \sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}, & g_{12}(x) = \dfrac{e^{-x}}{2-x}. \end{array}$$

Exercice 7.3.4 Calculez les deux dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} F_1(x,y) = 3x + y, & F_2(x,y) = x^3y^2, & F_3(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \\ F_4(x,y) = \dfrac{x}{y}, & F_5(x,y) = \frac{x-y}{x+y}, & F_6(x,y) = y\ln(x), \\ G_1(k,x) = x^2 + e^{2k}, & G_2(a,b) = a^b & G_3(y,t) = ty^2 + e^{ty}. \end{array}$$

Exercice 7.3.5 On définit la fonction g par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}^{+*},\ g(k,x) = e^{-kx^2}.$$

1. On fixe x et on considère la fonction $g_x(k) = e^{-kx^2}$, montrer que pour tout h et k strictement positive
$$h \leq k \iff g_x(h,) \geq g_x(k).$$
2. Pour le reste de l'exercice on fixe k et considère la fonction
$$g_k(x) = e^{-kx^2}$$
Montrer que g_k est dérivable et calculer sa dérivée. En déduire le tableau de variation de g_k.
3. Calculer g_k'' et résoudre l'équation $g_k''(x) = 0$.
4. Tracer la courbe de g_1.

Chapitre 8

Calcul d'intégrales

Le sujet central du chapitre précédent était la dérivation et nous rappelons quel rôle elle jouait dans beaucoup de questions économiques intéressantes. Mais les économistes sont souvent confrontés, en particulier lorsqu'ils font des statistiques, au problème consistant à trouver une fonction à partir d'une information sur sa dérivée.
Construire l'expression d'une fonction à partir de celle de sa dérivée peut être vu comme **la démarche « inverse » de la dérivation**, que les mathématiciens nomment **intégration**.
Les formules qui donnent l'aire de n'importe quel triangle et donc aussi de n'importe quel polygone, limité par définition par des côt ´es rectilignes, sont connues depuis bien longtemps. Il y a 4 000 ans déjà, les Babyloniens ont eu besoin de mesurer avec précision l'aire de domaines plans, non limités par des droites, comme le cercle par exemple. Ces problèmes d'aires sont étroitement liés à l'intégration, comme l'explique la section 8.1.3.

8.1 Définition et Propriétés

8.1.1 Primitives

Définition 51 *Soit f une fonction* **continue** *sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point) de $\mathbb{R}$, une primitive de f sur I est une fonction F vérifiant*

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Dans le tableau ci-dessous, on donne les primitives à connaitre :

Fonction	Intervalle	Primitive
$\alpha \in \mathbb{R}^*$, $e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c$
$a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $a^x = e^{xLn(a)}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + c$
$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$, x^α	dépend de α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$1/x$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln(\lvert x\rvert) + c$

8.1.2 Intégrale définie

Définition 52 *Soit f une fonction* **continue** *sur un intervalle I (non vide et non réduit à un point) de $\mathbb{R}$ et F une primitive quelconque de f sur I.*
Alors, $\forall(a,b) \in I^2$, le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive F choisie et s'appelle **intégrale définie de f entre les bornes a et b.**
On le note : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ ce qui s'énonce somme de a à b de $f(x)dx$.

Remarque 53 *Les nombres a et b sont appelés, respectivement, borne inférieure et borne supérieure d'intégration. La variable x est muette au sens où elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas ailleurs dans l'expression. Par exemple,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(\xi)d\xi$$

sont toutes égales à $F(b) - F(a)$.
Mais n'écrivez pas quelque chose comme $\int_a^y f(y)dy$, où la même lettre y désigne à la fois la borne supérieure et la variable d'intégration, car cela n'a pas de sens.

8.1.3 Interpétation géométrique de la notion d'intégrale définie

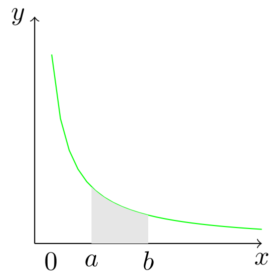
On suppose le plan rapporté à un repère orthogonal (en général orthonormé). On choisit pour unité d'aire : l'aire du rectangle construit sur les vecteurs unités du repère et on construit la courbe représentative de f sur $[a,b]$. (on suppose ici $a < b$).

En particulier, si f **est une fonction constante sur** $[a,b]$ telle que : $\forall x \in [a,b],\ f(x) = c$ on a $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$. Ce résultat s'interprète comme l'aire d'un rectangle et nous admettrons que ce résultat se généralise comme suit : Si f est une fonction **positive**, continue sur $[a,b]$ avec $a < b$, alors $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ du plan défini par $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Exemple 54 *On considère la fonction $f(x) = 1/x$ définie sur $\mathbb{R}^*$, on a pour $0 < a < b$*

$$\int_a^b f(x)dx = [\ln(x)]_a^b = \ln(b) - \ln(a) = \ln(b/a).$$

Cette intégrale est l'aire grisée sur la figure ci-dessous.



Remarque 55 *La définition donne :*

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ et } \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

8.2 Propriétés de l'intégrale définie

8.2.1 Relation de Chasles

Théorème 56 Relation de Chasles. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors*

$$\forall (a,b,c) \in I^3, \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

L'ordre des réels $a, b, c,$ est sans importance mais il ne faut pas sortir de l'intervalle I.

Exemple 57 *Calculer* $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{2} |x|\, dx.$

8.2.2 Linéarité

Théorème 58 *Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors pour tout $(a,b) \in I^2$:*

1. $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ *où α est une constante.*
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
3. *Les deux règles précédentes conduisent à la règle plus générale*

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (a,b) \in I^2,\ \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Exemple 59 *Calculer* $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{2x^5 - 3x^2 + \sqrt{x}}{x^{3/2}} dx.$

Remarque 60 *Ne pas confondre relation de Chasles et linéarité. Pour la relation de Chasles il y a une seule fonction et on " divise" l'intervalle d'intégration. Pour la linéarité il y a un seul intervalle et on " fractionne " la fonction.*

8.2.3 Intégration par parties

Cette méthode part d'une idée toute simple, utiliser la dérivée d'un produit, et donne un résultat très puissant permettant de calculer de nombreuses intégrales.

Théorème 61 *Soient u et v* **deux fonctions de classe** C^1 *sur un intervalle I, alors :*

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Ce théorème est intéressant lorsque l'intégrale du second membre est plus facile à calculer que l'intégrale du premier membre.

Exemple 62 *Calculer* $I_4 = \int_0^1 xe^x dx$.

Solution : On choisit $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$ de manière à ecrire la fonction sous le signe integrale sous la forme $u(x)v'(x)$. Alors, $v(x) = e^x$ et $u(x)v'(x) = xe^x$.

$$\begin{array}{ccccccccc} \int_0^1 & x & e^x dx & = & x & e^x - \int_0^1 & 1 & \times & e^x dx \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & u(x) & v'(x) & & u(x) & v(x) & u'(x) & & v(x) \end{array}$$

Remarque 63 *On peut aussi utiliser une intégration par parties, dans le cas particulier où il n'y a qu'une seule fonction en posant* $v'(x) = 1$.

Exemple 64 *Calculer* $I_5 = \int_2^3 ln(x)dx$.

8.3 Exercices

Exercice 8.3.1 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^3 x^2 - 3x + 2\,dx, \quad I_2 = \int_1^2 (x - \frac{1}{\sqrt{x}})x^2 dx,$$

$$I_3 = \int_{-1}^2 |x|\,dx, \quad I_4 = \int_1^2 \frac{2x^5 - 3x^2 + \sqrt{x}}{x^{3/2}} dx,$$

$$I_5 = \int_0^1 2^{3x} e^x dx \text{ et } I_6 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2}{x^2 - 1} dx,$$

pour I_6, on pourra remarquer que $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x}$.

Exercice 8.3.2 Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

$$I_1 = \int_1^2 x^\alpha \ln(x) dx, \quad (\alpha \neq -1), \quad I_2 = \int_0^1 x^2 2^x dx.$$

Exercice 8.3.3 Sachant que la fonction f est C^2 sur $\mathbb{R}$, que $f(1) = 2, f(4) = 7, f'(1) = 5$ et $f'(4) = 3$, calculer l'intégrale $I = \int_1^4 x f''(x) dx$.

Exercice 8.3.4 On considère les fonctions f et h définies sur le domaine $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ; f(x) = \frac{1}{1 + e^x} \quad h(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = h(x).$$
2. Soit A un réel, en utilisant le résultat de la question 1
   (a) Calculer en fonction de A l'intégrale : $\displaystyle\int_0^A h(x) dx$.
   (b) Puis montrer que la limite existe $I = \displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A h(x) dx = \int_0^{+\infty} h(x) dx$ et calculer sa valeur.

Chapitre 9

Révision : étude de fonction

Exercice 9.0.1 *Janvier 2020*
On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}.$$

1. *Calculer $f(0)$.*
2. *Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.*
3. *Montrer que*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}.$$
4. *Calculer en utilisant le taux d'accroissement $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 2 + (x^2 + 2)e^{-x}}{x}$.*
5. *On considère la fonction h définie par*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}.$$
   (a) *Calculer $h(0)$.*
   (b) *Calculer la dérivée de h.*
   (c) *Déduire le tableau de variation de h.*
   Pour la suite On admet que** $h(x) = 0$ **admet une unique solution** α**. et que** $\alpha \in]0, 1[$**.
   (d) *En exprimant f' en fonction de h, donner le tableau de variation de f.*
   (e) *Démontrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$*
6. (a) *Montrer que la dérivée seconde de f est*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = (x - 2)^2 e^{-x}.$$
   (b) *Que peut on déduire sur la convexité de la fonction f.*
7. *Donner une équation de la tangente au point d'abscisse $x = \alpha$ au graphe de f.*
8. *Démontrer que α est un minimum global de f.*
9. *Tracer le graphe de f en représentant la tangente au point d'abscisse $x = \alpha$ (indication : $f(\alpha) \sim 0.85$).*

Exercice 9.0.2 *Examen janvier 2019*

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = 2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}.$$

1. *Calculer $f(1)$.*
2. *Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0.* *Pour la limite en 0, on pourra mettre $\ln(x)/x$ en facteur.*
3. *Montrer que*
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = \frac{2x - 2 + \ln(x)}{x^2}.$$
4. *On considère la fonction h définie par*
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad h(x) = 2x - 2 + \ln(x).$$
   (a) *Calculer $h(1)$.*
   (b) *Calculer la dérivée de h.*
   (c) *En exprimant f' en fonction de h, donner le tableau de variation de f.*
5. (a) *Montrer que la dérivée seconde de f est*
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^3}(5 - 2x - 2\ln(x)).$$
   (b) *On admet que l'équation $f''(x) = 0$ admet une unique solution notée a dans $\mathbb{R}^{+*}$ et que $1 < a < 2$. En déduire que f est convexe sur $]0, a]$ et concave sur $[a, +\infty[$. On pourra approcher e par 2.7.*
6. *Donner une équation de la tangente au point d'abscisse $x = 1$ au graphe de f.*
7. *Tracer le graphe de f en représentant la tangente au point d'abscisse $x = 1$.*
8. (a) *On pose*
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad F(x) = (2x+1)\ln(x) - 2x - \frac{1}{2}\ln^2(x).$$
   Calculer la dérivée F' de F.

Exercice 9.0.3 *Examen Janvier 2018*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2x} - 6e^x + 9.$$

On donne les valeurs approchées du logarithme en 2 et en 3

$$\ln(2) \simeq 0,69 \text{ et } \ln(3) \simeq 1,1.$$

1. *Justifier que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ et calculer $f(\ln 3)$.*
2. *Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.*
3. *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = 2e^x(e^x - 3)$. En déduire le tableau de variations de f.*
4. *Déterminer le ou les réels x tels que $f(x) = 9$. On donnera une valeur approchée des ces réels à l'aide des deux valeurs approchées données au début de l'énoncé.*
5. *Déterminer le ou les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.*
6. *Donner une équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ au graphe de f.*
7. *Tracer le graphe de f en représentant la tangente au point d'abscisse $x = 0$.*